අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය – 2023

සංයුක්ත ගණිතය

≈ සමතුලිතතාවය - 1 ≈

Manoj Solangaarachchi
_(B. Sc.)_

(01) a දිගින් යුතු ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක ගැටෙමින් සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතව තබා ඇත්තේ දණ්ඩේ B කෙළවරට හා A ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කොට ඇති සැහැල්ලු තන්තුවක් මගිනි. තන්තුවේ දිග l ය. පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇති විට දණ්ඩ සිරසට ආනත කෝණයේ අගය දැක්වෙන ප්‍රකාශනයක් ලබාගෙන මේ අන්දමට දණ්ඩ සමතුලිතව තිබීමට නම් $2a \geq l \geq a$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

---

(02) W බරැති ඒකාකාර AB දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක ගැටෙමින් A කෙළවරට ඉහළින් B කෙළවර පිහිටන සේ දණ්ඩ සමතුලිතව තබා ඇත්තේ B හා එකම තිරස් මට්ටමේ බිත්තිය මත පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයක් හා දණ්ඩ මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයක් සම්බන්ධ කරන සැහැල්ලු තන්තුවක් මගිනි. දණ්ඩ සිරසට θ කෝණයකින් ද, CD තන්තුව සිරසට α කෝණයකින් ද ආනත නම් $\tan\theta = 2\tan\alpha$ බව ද, $AC = \frac{1}{3}AB$ බව ද පෙන්වන්න.

---

(03) තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සුමට තලයක් මත සිලින්ඩරාකාර පයිප්පයක් එහි අක්ෂය තිරස් ව පිහිටන සේ සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ සිලින්ඩරය මත ගැටෙන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් මගිනි. ආනත තලය සමඟ α කෝණයක් සාදන මෙම දණ්ඩේ A කෙළවර සිලින්ඩරයට පහළින් ආනත තලය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කොට තිබේ. B කෙළවර සිලින්ඩරය ස්පර්ශ වෙමින් පවතී. දණ්ඩේ බර සිලින්ඩරයේ බර මෙන් දෙගුණයකි. එකිනෙක ගැටී ඇති පෘෂ්ඨය සියල්ල සුමට ඒවා නම් ද, සිලින්ඩරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරන සිරස් තලයේ දණ්ඩ පිහිටා ඇත්නම් ද, $\tan\theta = \dfrac{\sin 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

---

(04) l දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් සැහැල්ලු මුදුවකට ද අනෙක් කෙළවර බර ඒකාකාර සුමට දණ්ඩක කෙළවරකට ද අමුණා තිබේ. දණ්ඩේ දිග $2a$ ය. සුමට ඇණයක් මතින් තන්තුව දමා දණ්ඩේ නිදහස් කෙළවර මුදුව තුළට රුවාලීමෙන් දණ්ඩ සිරසට θ කෝණයකින් ආනතව පිහිටන සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ ඇත්නම්, $l = \dfrac{2a\tan^3\theta}{1+\tan^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

(05) එකිනෙකක බර W බැගින් වූ A, B ඒකාකාර සුමට ගෝල දෙකක අර්ධ විෂ්කම්භ පිළිවෙලින් r හා R වේ. l දිගැති සැහැල්ලු තන්තුවක් C නම් වූ සුමට කුඤ්ඤයක් මතින් දමා තන්තුවේ කෙළවරක් A ගෝලය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට ද, අනෙක් කෙළවර B ගෝලය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට ද, සම්බන්ධ කොට තිබේ. A හා B ගෝල එකිනෙක ගැටෙමින් සමතුලිතතාවේ පිහිටයි නම් AC හා BC තන්තු කොටස් තිරස සමඟ සාදන කෝණ සමාන බව ද, ඒ එක් එක් කෝණයේ අගය $\cos^{-1}\left\{\frac{R+r}{R+r+1}\right\}$ බව ද පෙන්වන්න.

---

(06) ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සෑදි ඍජු වෘත්තාකාර ඒකාකාර ඝන කේතුවක අඩ සිරස් කෝණය α වේ. එහි උස h ය. කේතුවේ ශීර්ෂයට සම්බන්ධ කොට ඇති දිග l වූ තන්තුවකින් කේතුව සිරස් බිත්තියක වූ A ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබේ. වෘත්තාකාර පාදය බිත්තියේ ගැටෙමින් අක්ෂය තිරස් ව පිහිටන සේ කේතුව සමතුලිතතාවේ පවතී. බිත්ති සුමට නම් ද කේතුවේ පාදයේ කේන්ද්‍රය A ට සිරස් ලෙස පහළින් පිහිටා ඇත්නම් ද $l \leq h\sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

---

(07) අර්ධ විෂ්කම්භය a වන අර්ධ ගෝලාකාර සුමට පාත්‍රයක් එහි අක්ෂය සිරස් ව පිහිටන සේ දෘඪ ලෙස සවි කොට තිබේ. ඒකාකාර ACB දණ්ඩක A කෙළවර පාත්‍රය ඇතුළත වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ගැටෙමින් ද B කෙළවර පාත්‍ර ගැට්ටෙන් පිටතට නෙරා පිහිටමින් ද, සිටින සේ C ලක්ෂ්‍යය පාත්‍ර ගැට්ටේ ගැටෙමින් දණ්ඩ සමතුලිතව තිබේ. දණ්ඩ තිරසට 30° ක කෝණයකින් ආනත නම් දණ්ඩේ දිග $4\sqrt{3}a/3$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩේ බර W නම් A හා C ලක්ෂ්‍යය වල දී දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

---

(08) $AB = 2a, AD = 2b$ වන $ABCD$ ඒකාකාර ඍජුකෝණාස්‍ර තහඩුවක් l දිගින් යුතු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් A ශීර්ෂයෙන් සුමට බිත්තියක පිහිටි O අචල ලක්ෂ්‍යයක එල්ලා තිබේ. D ශීර්ෂය බිත්තිය මත ගැටී තිබිය දී O හරහා බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක තහඩුව සමතුලිතතාවේ පවතී. OA හා AD පිළිවෙලින් සිරසට θ හා ϕ කෝණවලින් ආනත වී තිබේ නම් ඒවා $\frac{l}{b} = \frac{2\sin\phi}{\sin\theta}$, $\frac{a}{b} = \tan\phi + 2\tan\theta$ යන සමීකරණ වලින් නිර්ණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.
$AB = 3\ m$ හා $AD = 1\ m$ වන විට OAB සරල රේඛාවක් වන සේ තහඩුව එල්ලෙන්නට නම් කොපමණ දිග තන්තුවක් ඔබ තෝරා ගන්නෙහිද?

---

(09) ලක්ෂ්‍යයක දී ක්‍රියා කරන බල තුනක් සමතුලිතතාවේ තිබේ නම් එක් එක් බලය අනෙක් බල දෙක අතර කෝණයේ සයිනයට සමානුපාතික බව පෙන්වන්න. $ABCD$ වනාහි සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකි. එය එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි A හා D යන අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට ගැටගසා ඇති අතර W_1 හා W_2 බර පිළිවෙලින් B, C ලක්ෂ්‍යයන්ගෙන් එල්ලා තිබේ. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී C හි මට්ටමට උඩින් B තිබෙන අතර AB, BC හා CD උඩු සිරස සමඟ පිළිවෙලින් θ, ϕ හා β සුළු කෝණ සාදයි.

$\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{\sin\beta\sin(\phi-\theta)}{\sin\theta\sin(\phi+\beta)}$ බව පෙන්වන්න.

---

(10) $2l$ දිගැති AOQ තන්තුවක් මගින් O සුමට නාදැත්තකින් $2a$ දිගැති W බර ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එල්ලා ඇත. තන්තුවේ එක් කෙළවරක් දණ්ඩෙහි A ට ගැට ගසා අනෙක් කෙළවර Q නම් කුඩා ලුහු සුමට මුදුවකට ඇඳා තිබෙන අතර මුදුව දණ්ඩ දිගේ සර්පණය වෙයි. දණ්ඩ තිරසට θ කෝණයකින් ආනතව තිබෙයි. Q මුදුවෙත් AB දණ්ඩෙත් සමතුලිතතාව සැලකීමෙන් පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල අපෝහනය කරන්න.

(i) තන්තුවේ කෙළින් පිහිටි එක් එක් කොටස සිරසට θ කෝණයකින් ආනත බව

(ii) තන්තුවේ ආතතිව $\dfrac{1}{2}W\sec\theta$ බව

(iii) θ කෝණය $a\cos^3\theta = l\sin\theta$ යනුවෙන් දැක්විය හැකි බව

---

(11) බර W ද අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් a දිගැති තන්තුවක් මගින් අචල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබේ. බර W ද දිග $4a$ ද වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් එම ලක්ෂ්‍යයට ම නිදහසේ ඇඳා ඇත. දණ්ඩ ගෝලය හා ස්පර්ශ වෙමින් නිසලව තිබෙයි නම් තන්තුවේත්, දණ්ඩේත් සිරසට ආනති එක එකක් $\pi/12$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W\cos(\pi/12)}{\sin(\pi/3)}$ බව ද පෙන්වා ගෝලයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

---

(12) දිග $2a$ ද බර W ද වූ ඒකාකාර සුමට AB දණ්ඩට එහි අචල A කෙළවර වටා සුචල ලෙස හැරෙන්නට පිළිවන. බර $2W$ වූ කුඩා සුමට මුදුවකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකිය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි D අචල ලක්ෂ්‍යයකට මුදුව ඇඳා ඇත්තේ $a/4$ දිගෙන් යුතු සැහැල්ලු තන්තුවක් මගිනි. තන්තුවත් දණ්ඩත් එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. $AD = a/4$ සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුදුව අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ තිරස සමඟ $\pi/3$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතියත් A කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

---

(13) දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල සමාන්තර නොවන බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවෙන් තබා ගතියි නම් ඒ බල ලක්ෂයයක දී හමු විය යුතු බව පෙන්වන්න.

W බරින් යුතු AB දණ්ඩක් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ බෙදාලන්නේ පිළිවෙලින් a හා b දිග ඇති AC හා CB කොටස් දෙකටය. දණ්ඩ නිසලව සමතුලිතතාවෙන් තිබෙන්නේ B ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳු $l\,(>a+b)$ දිගින් යුතු ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් A කෙළවරට සම්බන්ධ කිරීමෙනි.

(i) $\cos^2 ABD = \dfrac{a^2}{b(b+2)}\left\{\dfrac{l^2}{(a+b)} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

(14) ඒකාකාර දණ්ඩක දිග $2l$ ය. බර W ය. මෙම දණ්ඩේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට d දුරකින් w බරැති ස්කන්ධයක් අමුණා තිබේ. දණ්ඩ සහිත ස්කන්ධය අර්ධ විෂ්කම්භය R වූ $(R > l)$ සුමට ගෝලයක් තුළ සමතුලිතතාවේ තිබේ. දණ්ඩ තිරසට දරණ ආනතිය θ නම්, $\tan\theta = \dfrac{wd}{(W + w)\sqrt{R^2 - l^2}}$ බව පෙන්වන්න.

---

(15) අර්ධ විශ්කම්භය $3a$ වන A ඒකාකාර සිලින්ඩරයක් හා අර්ධ විෂ්කම්භය a වන B ඒකාකාර සිලින්ඩරයක් ජනන රේඛාවක් දිගේ දෘඪ ලෙස එකිනෙකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක් තනා තිබේ. සුමට තිරස් තලයක් මත ඇති අර්ධ විෂ්කම්භය a වන C සිලින්ඩරයක් මත A හා B සිලින්ඩරය ද ඊට අමතරව එම තිරස් තලය ම මත A සිලින්ඩරය ද ගැටෙමින් සිලින්ඩර තුන සමතුලිතතාවේ තිබේ. එකිනෙකට ගැටී ඇති පෘෂ්ඨ සියල්ල සුමට ඒවා වශයෙන් සලකා B සිලින්ඩරයේ බර W නම්, B හා C සිලින්ඩර අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{7\sqrt{5} + 5}{20}W$ බව පෙන්වා A හා C සිලින්ඩර අතර ප්‍රතික්‍රියාවේ අගය සොයන්න.

---

(16) W බරැති $2a$ දිගැති ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. මෙම දණ්ඩ තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව ඇති උස h ඝනකාකාර ලී කොටසකට හේත්තු කොට ඇත්තේ A කෙළවර මේසය මත ද B කෙළවර ලී කොටයෙන් ඉහළට ද පිහිටන සේය. ලී කොටයේ බර w ය. ලී කොටයේ දාරයකට ලම්බව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයේ දණ්ඩ පිහිටා ඇති අතර දණ්ඩ හා ලී කොටය ගැටී ඇති ස්ථානය සුමටය. ලී කොටය මේසය දිගේ ලිස්සායාම වැළැක්වීමට මේසයේ ඝර්ෂණය ප්‍රමාණවත් වේ. දණ්ඩ හා ලී කොටය අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $h < \dfrac{W}{w}a\sin 2\theta(\sin\theta - \cos\theta)$ නම් ලී කොටය පෙරලෙන බව පෙන්වන්න.

---

(17) A, B, C වූ කලී එක එකක් W බරැති සෘජු වෘත්තාකාර සුමට ඒකාකාර සිලින්ඩර තුනකි. l තිරස් රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක කැපෙන තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තල දෙකක් අතර A හා B සමමිතික ලෙස තබා ඇත. දැන් A හා B මත සමමිතික ලෙස C සිලින්ඩරය තබනු ලැබේ. සිලින්ඩර තුනේ ම අක්ෂ l රේඛාවට සමාන්තරව පිහිටයි. A හා B සිලින්ඩර අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $\tan\alpha < \sqrt{3}/9$ නම් සිලින්ඩර වෙන් නොවන බව පෙන්වන්න.

---

(18) අර්ධ විශ්කම්භය a වූ සුමට කුහර අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් එහි ගැට්ට තිරස් වන ලෙස සවි කර ඇත. බර w වූ අංශුවක් B හි සවි කර ඇති බර $2w$ ද, දිග l ද වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A පාත්‍රයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ වන ලෙස ද දණ්ඩෙහි ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයෙහි ගැට්ට ස්පර්ශ වන ලෙස ද නිශ්චලව පිහිටයි. දණ්ඩ තිරසත් සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම් $l = 3a\cos 2\theta\sec\theta$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩෙහි තිරසට ආනති කෝණය රේඩියන් $\pi/6$ ට නොවැඩි බව අපෝහනය කරන්න.

(19) දෙකෙළවර ම විවෘත කුහර සහිත ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක අභ්‍යන්තර අර්ධ විෂ්කම්භය $8a$ ය. බාහිර අර්ධ විෂ්කම්භය $9a$ ය. දිග $2l$ ය. ඒකාකාර වූ මෙම සිලින්ඩරය අක්ෂය සිරස් ව පිහිටන සේ සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටුවා තිබේ. සිලින්ඩරය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයෙන් ම සෑදි එක එකක අර්ධ විෂ්කම්භය $6a$ වන ඒකාකාර සුමට ගෝල දෙකක් සිලින්ඩරය තුළ බහා තිබේ. $17l / 64\,a$ නම් සිලින්ඩර නොපෙරලෙන බව පෙන්වන්න.

---

(20) W බර $8a$ දිග ඒකාකාර දණ්ඩක් සුමට සිරස් බිත්තියකට ස්පර්ශව තබා ඇත්තේ $AC\,(<4a)$ වූ ලක්ෂ්‍යයකට යොදන ලද සිරසට $30°$ කින් ආනත අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. තන්තුවේ අනෙක් කොන බිත්තිය මත A ට $\sqrt{3}a$ ඉහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න.

---

(21) අරය a වූ අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් එහි අක්ෂය සිරස් වන සේ ද එහි ගැට්ට මුදුනින් ම සිටින සේ ද සවිකර ඇත. දිග l වූ AB සුමට දණ්ඩක A කෙළවර පාත්‍රය ඇතුළත ද B පිටත ද වන පරිදි තිරසට θ කෝණයකින් ආනතව තබා ඇත. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G නම්, $AG = Kl$ වේ. සමතුලිතතාව සඳහා $2a\cos 2\theta = Kl\cos\theta$ බව පෙන්වන්න. $K = ½$ නම් සමතුලිතතාවට දණ්ඩේ දිග $\frac{\sqrt{8}a}{3}$ හා $4a$ අතර බව පෙන්වන්න.

---

(22) W බර AB දණ්ඩක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් a, b දිග කොටස් දෙකකට බෙදෙයි. දණ්ඩේ එක් කෙළවරක් AD සුමට බිමක් මත ද අනෙක් කෙළවර DB සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තු වෙමින් ද සමතුලිතතාවේ වන්නේ D කොක්කට හා දණ්ඩ මත P ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගැසූ තන්තුවක් ආධාරයෙනි. දණ්ඩේත් තන්තුවේත් තිරසට ආනති පිළිවෙලින් θ හා ϕ නම් තන්තුවේ ආතතිය

$$T = \frac{Wa\cos\theta}{(a+b)\sin(\theta-\phi)}$$

බව පෙන්වන්න.

---

(23) බර W වූ වෙනස් අරයන් ඇති A, B ගෝල දෙකක් ශීර්ෂයට යටි අතට සිටින සේ අචලව තබා ඇති සුමට ඍජු වෘත්තාකාර කුහර කේතුවක් ඇතුළත සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ එක් එක් ගෝලය එක් ලක්ෂ්‍යයක දී පමණක් කේතුව ස්පර්ශ කරන පරිදිය. කේතුවේ අඩ සිරස් කෝණය $\pi/3$ වන අතර එහි අක්ෂය සිරස සමඟ $\beta\,(<\pi/6)$ කෝණයක් සාදයි. AB රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්, $\theta = \tan^{-1}\left(\cot 2\beta - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2\beta\right)$ බව පෙන්වන්න. කේතුවේ පැතිවල ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

(24) a අරයෙන් යුත් අර්ධ වෘත්තාකාර සුමට කම්බියක් එහි අක්ෂය සිරස් ව ශීර්ෂය ඉහළින් ඇතිව අචල ලෙස සවිකර ඇත. W බරැති සුමට කුඩා P මුදුවක් මෙයට රිංගවා ඇත. අක්ෂය දිගේ ඇති සුමට කම්බියකට w බරැති කුඩා Q සුමට මුදුවක් රිංගවා ඇත. $l\,(<a)$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් මුදු දෙක එකට අමුණා ඇත. වෘත්ත කේන්ද්‍රය O වන අතර OP ත් QP ත් උඩු සිරසට ආනත කෝණ $\theta, \phi\,(>\theta)$ විට පද්ධතිය සමතුලිතව සිටී නම්, $\tan\theta = \left(\dfrac{w}{W+w}\right)\tan\phi$ බව පෙන්වන්න.

$W = 3w$ ද $l = ½\,a$ ද නම් තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

---

(25) A, B, C යනු සුමට ගෝල තුනකි. ගෝල වල බර W බැගින් වේ. A සහ B අරයන් $3a$ බැගින් වන අතර C හි අරය a වේ. A සහ B මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකට දිග සමාන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක එක් කෙළවර බැගින් සම්බන්ධ කර තන්තු වල අනෙක් කෙළවරවල් එක්තරා අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර පද්ධතිය නිදහසේ එල්ලා ඇත. A සහ B ගෝලමත C ගෝලය සමමිතික ලෙස තබා ඇත. C ගෝලය තන්තු සමඟ නොගැටේ. තන්තුවල ආතති එක එකක් $\sqrt{3}W$ ට සමාන බව පෙන්වන්න. මෙහිදී තන්තු සිරසට ආනත කෝණ 30° යයි දී ඇත. A සහ C අතර ප්‍රතික්‍රියාව $2W/\sqrt{7}$ සමාන බව පෙන්වන්න. A සහ B අතර ප්‍රතික්‍රියාව ආසන්න වශයෙන් $0.3W$ බව පෙන්වන්න.

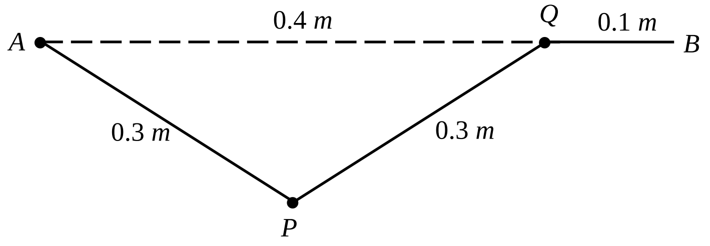
{ $\sqrt{3} = 1.732$ ලෙස ද $\sqrt{7} = 2.646$ ලෙස ද ගන්න.}

---

(26) බර W වන ඒකාකාර AB දණ්ඩකට A හිදී අචල අසවුවක් වටා භ්‍රමණය විය හැකිය. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් අන්තයක් B ට අමුණා අනෙක් අන්තයට ලුහු සුමට මුදුවක් අමුණා A හරහා යන අචල තිරස් සුමට කම්බියකින් මුදුව පන්නා ඇත. මුදුව සමතුලිතව තැබීම සඳහා එයට යෙදිය යුතු තිරස් බලය $\dfrac{W\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ බව පෙන්වන්න.

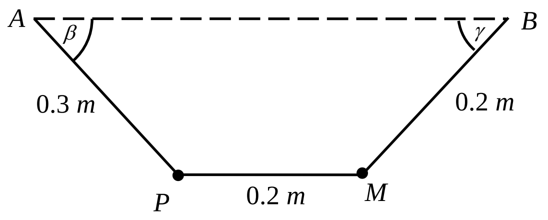
---

(27) (ගුරුත්වජ ත්වරණය $10ms^{-2}$ ලෙස ගන්න.)



දිග $0.7\,m$ වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවර එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි A සහ B ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සම්බන්ධ කර ඇත. මෙහි $AB = 0.5\,m$ වේ. $0.2\,kg$ ස්කන්ධය පවතින අංශුවක් $AP = 0.3\,m$ වන පරිදි වූ P ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. AB තිරස් රේඛාවේ B සිට $0.1\,m$ දුරින් පිහිටි සුමට Q නාදැත්තක් මගින් තන්තුව ගමන් කරමින් රූප සටහනේ පරිදි පද්ධතිය සමතුලිතව පවතී.

(i) තන්තුවේ AP, PQ සහ QB කොටස්වල ආතති සමාන වන්නේ මන්දැයි පහදන්න.
දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදිව එම ආතතිය $1.34\ N$ බව පෙන්වන්න.
(ii) Q නාදැත්ත මහින් තන්තුව මත ඇතිවන බලයත් QA ත් අතර කෝණය $\tan^{-1}(\sqrt{5})$ බව පෙන්වන්න.



Q නාදැත්ත ඉවත් කරනු ලබන අතර PB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M ට ස්කන්ධය $m\ kg$ වූ අංශුවක් සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. PM තිරස් ව පිහිටන සේ පද්ධතිය නිදහසේ සමතුලිතව එල්ලෙන අතර AP සහ MB තිරස සමඟ පිළිවෙලින් β සහ γ කෝණ සාදයි. මෙහි $\cos\beta = \frac{7}{9}$ සහ $\cos\gamma = \frac{1}{3}$ වේ. m හි අගය සොයන්න.

---

(28) බර w වන ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ආධාරක අරය a ද උස $2a$ ද ඇල උස l ද වේ. l දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක කෙළවරක් කේතුවේ ශීර්ෂයට ද අනෙක් කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක් මත වූ අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද සම්බන්ධ කර කේතුව එල්ලා ඇත.
කේතුවේ ආධාරකයේ ගැට්ට මත ලක්ෂ්‍යයක්, O ට සිරස් ව පහළින් බිත්තිය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක ගැටෙමින් කේතුව නිදහස් ව සමතුලිතව පවතී. තන්තුව යටි සිරසට ආනත කෝණය θ නම්, $\tan\theta = \frac{3}{16}$ බව පෙන්වන්න.

---

(29) W බරින් යුතු AB දණ්ඩක් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ බෙදාලන්නේ පිළිවෙලින් a හා b දිග ඇති AC හා CB කොටස් දෙකටය. දණ්ඩ නිසලව සමතුලිතතාවෙන් තිබෙන්නේ B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තු කර B ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ $l\,(> a + b)$ දිගින් යුතු ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් A කෙළවරට සම්බන්ධ කිරීමෙනි.
(i) $\cos^2 A\hat{B}D = \dfrac{a^2}{b(b+2a)}\left\{\dfrac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න.
(ii) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

---

(30) a දිගකින් යුතු ඒකාකාර සිහින් දණ්ඩක දෙකෙළවර A සහ B ය. A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක ගැටෙමින් සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතව තබා ඇත්තේ, දණ්ඩේ B කෙළවරට හා A ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධකොට ඇති $3a$ දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ ඇති විට දණ්ඩ සිරසට ආනත වන කෝණය $\sin^{-1}\sqrt{7/12}$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩේ බර W නම් තන්තුවේ ආතතිය W ඇසුරෙන් සොයන්න.

(31) අරය a සහ ආධාරක කේන්ද්‍රය O වන අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් අචලව සවිකර ඇත්තේ පාත්‍ර ගැට්ට තිරස් ව සහ ඉහළින් ම පිහිටන අන්දමිනි. $OA = OB = a$ සහ $O\hat{A}B = 30°$ වන ඒකාකාර OAB සමද්විපාද ත්‍රිකෝණාකාර තල ආස්තරයක් පාත්‍රය තුළට දමා සමතුලිතව ඇත. O ශීර්ෂය පාත්‍රයේ ආධාරක කේන්ද්‍රයෙහි ද A හා B ශීර්ෂ පාත්‍ර ඇතුල් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් ද OAB සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත. B කෙළවර සුමට ස්පර්ශකයක් වන අතර A කෙළවර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ වන රළු ස්පර්ශකයකි. ආස්තරය සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පවතින බව දී ඇත්නම් AB පාදය තිරසට ආනත වන කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ බව පෙන්වීමට cot ප්‍රමේයය භාවිතා කරන්න.

---

(32) සුමට පාත්‍රයක්, ගෝලයකින් කපාගත් ඛණ්ඩයක ස්වරූප ගනී. එම පාත්‍රය තම ගෝල කේන්ද්‍රයෙහි $120°$ කෝණයක් ආපාතනය කරයි. අරය a වෙයි. ගැට්ට තිරස් ව සහ ඉහළින් ම වන සේ මෙම පාත්‍රය අචලව සවි කර ඇත. බර w වන ඒකාකාර බර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුළට දමා ඇත්තේ දණ්ඩේ කෙළවරක් පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් ද අනෙක් කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පවතිමින් ද පිහිටන අන්දමිනි. දණ්ඩ තිරසට $15°$ කෝණයෙන් ආනතව සමතුලිතව පවතී නම් දණ්ඩේ දිග $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a$ බව සාධනය කර පාත්‍ර ගැට්ට මගින් දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාව $w/\sqrt{2}$ බව ද සාධනය කරන්න.

✦✦✦

Manoj Solangaarachchi
(B. Sc.)